

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.0827

基于 SPH 方法的非饱和多孔介质相变耦合研究

饶登宇¹, 白 冰¹, 陈佩佩²

(1. 北京交通大学 土木建筑工程学院, 北京 100044; 2. 北京建筑大学 理学院, 北京 102616)

摘 要: 在考虑相变的热能平衡方程和非饱和水分迁移质量控制方程的基础上, 建立温度场-水分场的耦合模型, 并采用一种无网格粒子算法 (SPH) 进行数值求解。其中, 耦合方程中考虑了水流传热以及温度势对水流的直接驱动, 在不考虑相变的情况下, 该耦合模型可退化为常温下的水-热耦合模型, 故可用于模拟冻融循环的相关问题。从求解热能平衡方程中的含冰量出发, 实现解耦并对半无限单向冻结条件下介质内非稳态温度场和体积含水率分布场进行模拟, 将耦合作用下的温度场与不耦合的解析解进行对比, 反映出水分迁移对温度场存在较大影响。最后, 求解了路基边坡在季节性周期温度边界下, 温度场、水分场分布的演变规律, 并评估了边坡阴阳面受热不均对水热两场分布的影响。计算结果基本能反映土冻结相变的实际物理过程, 光滑粒子算法可以用于尝试解决冻土领域的其他相关问题。

关 键 词: 非饱和土; 相变; 水-热耦合; 光滑粒子法; 路基

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2018)12-4527-10

Simulation of hydro-thermal coupling with phase-change in unsaturated porous media by SPH method

RAO Deng-yu¹, BAI Bing¹, CHEN Pei-pei²

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 102616, China)

Abstract: Moisture-temperature coupling control equations are introduced into the heat and mass balance equation for the consideration of phase change. Smoothed Particle Hydrodynamics method is used to solve the equations, where both moisture transfer driven by temperature and heat transfer by water are considered. While the phase transition process is ignored, the model can directly degrade to a generic coupled model of moisture and heat at normal temperature. Therefore it can be used to study freezing and thawing cycle of frozen soils (e. g., seasonal or daily variation in ground temperature). To validate the model, the solution of a semi-infinite unsaturated porous medium subject to a frozen wall is studied. The comparison result shows that the process of moisture migration impacts on heat transfer, with the degree intensifying as time. In addition, the model is used in an unsaturated subgrade with periodical temperature boundary. The temperature and moisture distribution of subgrade are different when considering different solar radiation in sunny and shady slope. The evolution of water content field and thermal field is given at the end. Since the algorithm can basically reflect the real physical process of phase change, it's credible to study other problems in the field of frozen soil by SPH method.

Keywords: unsaturated porous media; phase change; hydro-thermal coupling; SPH method; subgrade

1 引 言

相变是自然界常见的物理过程, 含水岩土介质

等多孔介质的相变给工程建设带来许多病害或安全隐患, 比如冻融循环中路基的冻胀、边坡受热不均所引起的不均匀沉降。事实上, 这些问题都伴随着

收稿日期: 2017-04-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.51478034, No.51678043); 北京建筑大学科学研究基金资助项目 (No.KYJJ2017018)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51478034, 51678043) and the Beijing University of Civil Engineering and Architecture Research Foundation (KJJ2017018).

第一作者简介: 饶登宇, 男, 1995 年生, 博士研究生, 主要从事岩土工程数值传热学等方面的研究工作。E-mail: raodengyu@sina.com

通讯作者: 白冰, 男, 1966 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土介质热力学特性方面的研究工作。E-mail: bbai@bjtu.edu.cn

水-热耦合作用。岩土介质内各势能的耦合作用必然会引起内部温度传输和物质迁移的非稳态变化^[1], 而土体相变问题是典型的热质迁移问题^[2], 因此, 建立非饱和土在相变中的热能传输和水分迁移耦合模型, 有助于更有效地解决这类问题。与常温下的水-热耦合相比, 在相变过程中, 介质的温度变化伴随着相变潜热的释放或吸收、水分赋存状态的变化, 产生水力梯度及温度梯度驱使水分从土水势高处向低处迁移; 而在水分迁移过程中伴随着热量传递, 介质中含水率及水分赋存状态的变化也将改变介质的热物理参数, 进而影响原有温度场。

本文所采用的 SPH 方法(光滑粒子流体动力学)是一种拉格朗日形式的无网格粒子算法, 最初被提出是用于解决天体物理学问题, 现已被广泛地应用于流体力学与固体力学。Brookshaw^[3]将 SPH 方法应用于热传导问题, 此后, 许多学者在热能传输方面开展了大量工作; Cleary 等^[4]提出改进, 可求解保证热流平衡时在不同材料属性的不连续物质中的热量传递问题; Liu 等^[5]结合若干算例从 SPH 方法的优势、方程离散化技巧、核函数作用等角度, 综合概括了 SPH 方法的发展现状和应用领域; 陈佩佩等^[6]对非饱和土水-热耦合、竖井冻结、渗流等问题进行了研究, 将光滑粒子法在岩土工程中的应用进一步拓展。从岩土介质相变耦合问题的数值研究方法上看, 传统的基于欧拉网格的有限差分法早期被经常使用, 但其在处理自由表面、变形边界、运动交界面和不均匀介质等方面存在困难; 基于拉格朗日网格的有限元法发展较为成熟并可求解某些复杂问题, 但其在处理大变形、高度非均匀性、物质交界面等问题时容易出现精度下降或不收敛, 网格的划分与计算也需占用大量工作量。而 SPH 法在处理大变形和介质交界面等问题时则具有天然优势^[7], 可有效克服网格算法的畸变问题和求解大型方程组的病态问题, 且只需要追踪粒子的变化就可以很容易地得到整个物理系统的特性。

早期的 Harlan 方程^[8]是冻土领域水-热耦合数值模拟的基础, 后续学者基本是在该方程上不断完善。Taylor 等^[9]将 Harlan 方程中的水土势项简化为未冻水含水率, 以未冻水含量梯度作为水分驱动力。朱志武等^[10]在 Taylor 方程的基础上, 采用经验性的联系方程描述未冻水含量与温度的关系, 将水流方程代入热流方程并消去含水率项, 简化为等效热传导方程并对冻土路基温度、位移、应力进行了计算分析。白青波等^[11]在水流方程中引入 VG 模型并考虑孔隙冰对未冻水迁移的阻滞作用, 但未冻水含量

与温度的关系仍依赖于经验性的联系方程, 水分迁移结果往往受所选用联系方程形式的影响。

本文进一步考虑了水分流动传热和温度势对水分迁移的影响, 建立了较为全面的水-热耦合模型; 采用 SPH 方法离散计算域, 从求解热流方程中的含冰量出发, 再求解未冻水含水率和温度场, 实现了温度场和水分场的全耦合, 避免了采用联系方程来描述冻土中孔隙冰、未冻水和温度的关系。此外, 将相变的水-热耦合控制方程和 SPH 方法相结合, 一方面可为冻土相关问题的研究提供新的方法, 另一方面也可拓展 SPH 方法在岩土工程中的应用。

2 SPH 方法基本原理

在 SPH 方法中, 问题域的状态用一系列粒子来描述, 粒子之间不需要任何连接, 粒子兼具近似点和材料成分的功能。利用 SPH 求解, 首先需用积分表示法来近似场函数(场函数核近似法), 然后将其离散为级数求和的形式(粒子近似法), 则 $f(x)$ 的积分表达式可写成^[5-7]:

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x')W(x-x', h)dx' \quad (1)$$

式中: $W(x-x', h)$ 为光滑函数, 可理解为点 x 处的函数值在 x' 处的权重; h 为核函数的光滑长度; Ω 为积分区域。

将式(1)转化为支持域内所有粒子叠加求和的离散化形式, 则第 i 粒子点对应的粒子近似式为^[12]

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^N f(x_j)W(r_{ij}, h) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (2)$$

式中: x_i 和 x_j 分别为粒子点 i 和 j 对应的坐标; 相应地, m_j 和 ρ_j 为粒子点的质量和密度, 定义 $r_{ij} = x_i - x_j$ 。

对式(2)两边 x_i 求一次导数, 并利用核函数导数的反对称性可得函数一阶导数在粒子点 x_i 处的粒子近似表达式为

$$f'(x_i) = \sum_{j=1}^N f_{ij} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial x_i} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3)$$

式中: $f_{ij} = f(x_i) - f(x_j)$ 。

式(2)两边对 x_i 求两次导数, 则可得到函数二阶导数在粒子点 x_i 处的粒子近似表达式为

$$f''(x_i) = \sum_{j=1}^N f(x_j) \frac{\partial^2 W(r_{ij}, h)}{\partial x_i^2} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (4)$$

实际上, 式(4)所表达的二阶导数的粒子近似对粒子无序性非常敏感, 当相关粒子 i 周围的粒

子分布不均匀时会导致很低的计算精度。尤其对于热传导问题, 采用式 (4) 会得到粒子 j 与 i 间传递的热量仅取决于两粒子之间距离, 而与粒子的其他特征信息无关。为此, 常采取以下形式^[5-6,12]:

$$f''(x_i) = \sum_{j=1}^N \frac{2m_j}{\rho_j} \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2} f_{ij} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial x_i} \quad (5)$$

3 相变水-热耦合离散化方程

对非饱和多孔介质做如下规定: ①非饱和和多孔介质中流体符合达西定律; ②热能传输满足傅里叶定律; ③介质均匀连续, 且为各向同性体; ④介质中不含盐分; ⑤不考虑水分蒸发。

3.1 SPH 模拟方法

SPH 方法的本质是用一系列粒子来描述问题域的状态, 图 1 中粒子 A、B、C 分别表征对应方形区域内的介质(比如 A 类粒子表征区域内的土颗粒、孔隙冰和气体), 粒子并不发生移动, 水气运移对应粒子中含水率等物理量的改变; 在相变问题中, 随着相变锋面的推进, 将产生 3 种不同粒子: 液相粒子、相变态粒子和固相粒子, 对应介质的不同状态。

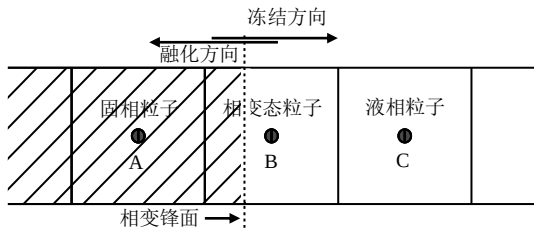


图 1 相变问题中存在的 3 种粒子

Fig.1 Three different particles in phase transition

计算中, 首先定义计算域内每一个粒子点对应的坐标、质量、密度、光滑长度、温度等基本参数以及粒子的初始类型(液相、固相、相变态), 根据粒子类型定义粒子的物理参数, 对于考虑相变的 SPH 问题, 还需定义相变潜热、相变粒子的潜热累加变化量等。

在任意计算步, 每一粒子所表征的区域内冰、水、空气及土颗粒各组分的含量均可确定, 故将粒子的密度 ρ 、比热 c 定义为加权平均数:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_s (1 - \theta_{\text{sat}}) + \rho_l \theta_l + \rho_{\text{ice}} \theta_{\text{ice}} + \rho_a (\theta_{\text{sat}} - \theta_l - \theta_{\text{ice}}) \\ c &= c_s (1 - \theta_{\text{sat}}) + c_l \theta_l + c_{\text{ice}} \theta_{\text{ice}} + c_a (\theta_{\text{sat}} - \theta_l - \theta_{\text{ice}}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: θ_{sat} 为饱和体积含水率, 其余下标 s、ice、l、

a 分别对应土粒、冰、液态水和气体。

在冻结过程中某一时刻, 若液相粒子温度首次降至低于相变温度, 则粒子进入相变态, 赋予相变态粒子属性, 开始计算该粒子的潜热累积量, 并保持该粒子温度为相变温度, 直至粒子的潜热累积量达到相变潜热, 粒子进入固相, 赋予粒子固相属性。最后, 更新所有粒子的相态, 进入下一时间步。

每一时间步计算完成后可得相变粒子的温度变化率、含冰量及未冻水含量变化率, 再采用显示时间积分法累加计算得到粒子的温度、含冰量和未冻水含量。

本文对相变过程做以下规定: ①粒子进入相变态后温度保持不变, 直至潜热累积量达到相变潜热, 标志着该粒子的相变潜热完全释放(吸收), 方可进入下一状态; ②只有处在相变态的粒子伴随着含冰量的变化; ③只有液态水可迁移运动。

3.2 热流平衡方程

在昼夜或季节性冻融过程中, 土体不断与大气上边界和潜水下边界发生水、热、汽的交换, 造成土体温度不断变化。相变问题的热流总平衡方程为

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + L_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t} - L_f \rho_l \frac{\partial \theta_l}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) - L_v \nabla q_{vz} - c_l \rho_l \nabla(q_l T) \quad (7)$$

本文暂不考虑蒸发潜热 L_v , 则热流平衡方程可进一步简化为^[13-14]

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) - c_l \rho_l \nabla(q_l T) + L_f \rho_{\text{ice}} \frac{\partial \theta_{\text{ice}}}{\partial t} \quad (8)$$

式中: C_v 为土体的体积比热容 ($\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$); T 为土体温度 ($^\circ\text{C}$); λ 为导热系数 ($\text{J} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$); L_f 为单位质量的冰水相变潜热, 取为 334 kJ/Kg ; ρ_{ice} 、 ρ_l 分别为冰和液态水密度; θ_{ice} 为体积含冰量; c_l 为液态水的比热容 ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$); q_l 为水分通量变化, 由式 (13) 确定。

水冻结(融化)相变过程中热量的释放(吸收)可看作在相变锋面处有一移动热源^[15]。式 (8) 所描述的是相变状态中的热流平衡关系, 等式右端尾项可视为该移动热源; 若无该移动热源, 则退化为考虑水分流动传热的热扩散方程, 其一维形式为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\lambda}{C_v} \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{c_l \rho_l}{C_v} \frac{\partial (q_l T)}{\partial z} \quad (9)$$

采用 SPH 方法离散化式 (9), 将每一时间步得到的 q_l 作为常数代入式中, 则粒子点 z_i 处的一维近

似表达式为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i = \sum_{j=1}^N \frac{\lambda}{C_v} \frac{2m_j}{\rho_j} \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^2} T_{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} - \sum_{j=1}^N \frac{c_1 \rho_1 q_1}{C_v} \frac{m_j}{\rho_j} T_{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} \quad (10)$$

式(10)适用于非相变态的粒子; 对处在相变态的粒子, 有 $\partial T / \partial t = 0$, 则相变态粒子点 z_i 的含冰量变化率可表示为

$$\frac{\partial \theta_{ice}}{\partial t} = -\frac{\lambda}{L_f \rho_{ice}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{c_1 \rho_1 q_1}{L_f \rho_{ice}} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial \theta_{ice}}{\partial t}\right)_i = \sum_{j=1}^N -\frac{\lambda}{L_f \rho_{ice}} \frac{2m_j}{\rho_j} \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^2} T_{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^N \frac{c_1 \rho_1 q_1}{L_f \rho_{ice}} \frac{m_j}{\rho_j} T_{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} \quad (12)$$

3.3 水分迁移方程

采用非饱和土水分运动的 Darcy-Richards 方程描述水分通量变化:

$$q_1 = -k \nabla \psi \quad (13)$$

式中: k 为非饱和水力传导系数, 可表示为未冻水含水率的函数 $k(\theta_1)$; ψ 为土水势, 是土中水分迁移的原动力, 由多种势能组成^[2], 仅考虑基质势、重力势和温度势 $\psi = \psi_m + \psi_g + \psi_T$ 。未冻水传导系数 $k(\theta_1)$ 采用 Von Genuchten 模型描述^[16]:

$$k(\theta_1) = k_s S_e^{1/2} [1 - (1 - S_e^{1/m})^m]^2 \quad (14)$$

式中: k_s 为饱和水力传导度; S_e 为有效饱和度, 按 $S_e = (\theta_1 - \theta_r) / (\theta_{sat} - \theta_r)$ 计算, θ_{sat} 和 θ_r 分别为饱和含水量和残余含水量, 参数 m 与土壤颗粒级配相关。

参照文献[11]定义非饱和土水分扩散率:

$$D(\theta_1) = k(\theta_1) I / c(\theta_1) \quad (15)$$

式中: $c(\theta_1)$ 为比水容量, 用于描述基质势与含水率的关系^[16]; I 为阻抗因子, 与含冰量有关, 表示冰对水分迁移的阻滞作用:

$$\left. \begin{aligned} c(\theta_1) &= a_0 m / (1 - m) S_e^{1/m} (1 - S_e^{1/m})^m \\ I &= 10^{-10 \theta_{ice}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中: $a_0 = \delta(\theta_s - \theta_r)$ 、 δ 为与土壤颗粒级配相关的参数, δ 、 m 的取值参考文献[17]。

以扩散率表示的非饱和流动达西定律可以表

示为

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -D(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - D_T(\theta_1) \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -D(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - D_T(\theta_1) \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z &= -D(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - k(\theta_1) - D_T(\theta_1) \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中: z 为重力方向; D_T 为温度诱导的水分迁移系数, $D_T(\theta_1) = k(\theta_1) \partial \psi_T / \partial T$, 简化地采用经验公式^[18]:

$$D_T(\theta_1) = D_0 (\theta_1 / \theta_0)^n \quad (18)$$

式中: D_0 和 n 为与土体结构相关的参数。

在不考虑水气蒸发的情况下, 介质微元中水分运动的质量守恒方程为

$$\frac{\partial (\rho_1 \theta_1 + \rho_{ice} \theta_{ice})}{\partial t} + \nabla (\rho_1 q) = 0 \quad (19)$$

由式(13)、(17)、(19)可得考虑重力作用的一维水分迁移方程为

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + a \frac{\partial \theta_{ice}}{\partial t} = D(\theta_1) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial k(\theta_1)}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + D_T(\theta_1) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (20)$$

式中: a 表示冰水密度之比。

在非相变态粒子点处有 $\partial \theta_{ice} / \partial t = 0$, 则粒子点 x_i 处的一维离散表达式为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial t}\right)_i &= D(\theta_1) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) + \frac{k(\theta_1)}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + D_T(\theta_1) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ &= D(\theta_1) \sum_{j=1}^N \frac{2m_j}{\rho_j} \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^2} \theta_1^{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} + \\ &+ \frac{\partial k(\theta_1)}{\partial \theta_1} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \theta_1^{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} + \\ &+ D_T(\theta_1) \sum_{j=1}^N \frac{2m_j}{\rho_j} \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^2} T_{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} \end{aligned} \quad (21)$$

相变态粒子点 x_i 处的近似表达式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= D(\theta_1) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial k(\theta_1)}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \\ &+ D_T(\theta_1) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) - a \frac{\partial \theta_{ice}}{\partial t} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \theta_l}{\partial t}\right)_i = & D(\theta_l) \sum_{j=1}^N \frac{2m_j}{\rho_j} \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^2} \theta_l^{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} + \\
& \frac{\partial k(\theta_l)}{\partial \theta_l} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \theta_l^{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} + \\
& D_T(\theta_l) \sum_{j=1}^N \frac{2m_j}{\rho_j} \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^2} T_{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} + \\
& a \sum_{j=1}^N \frac{\lambda}{L_f \rho_{ice}} \frac{2m_j}{\rho_j} \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^2} T_{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} - \\
& \sum_{j=1}^N \frac{c_i q_l}{L_f} \frac{m_j}{\rho_j} T_{ij} \frac{\partial W(z_i - z_j, h)}{\partial z_i} \quad (23)
\end{aligned}$$

在不考虑相变的情况下, 式 (7)、(19) 退化为常温下的一维水-热耦合方程^[1, 19-20]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_l}{\partial t} = & D(\theta_l) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta_l}{\partial z} \right) + \frac{k(\theta_l)}{\partial \theta_l} \frac{\partial \theta_l}{\partial z} + D_T(\theta_l) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} = & \frac{\lambda}{C_v} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{c_i \rho_i q_l}{C_v} \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

4 一维单向冻结水-热耦合

4.1 算例参数

本算例的计算域为一端施加冻结壁的均匀半无限多孔介质, 可简化为一维问题。介质的初始温度 $T_0 = 20^\circ\text{C}$, 相变温度 $T_f = -0.5^\circ\text{C}$, 初始含水率 $\theta_0 = 20\%$, 不考虑外界水分的补给。取恒定温度时, 上边界冻结壁温度 $T_i = -20^\circ\text{C}$ 。介质为砂黏壤土, 其余参数见表 1、2。

表 1 介质参数

Table 1 Parameters of unsaturated porous media

导热系数/(J/(h·m·°C))		土粒密度	土粒比热	饱和含水率
液相	固相	/(kg/m ³)	/(J/(kg·°C))	
5 000	6 000	2 500	840	0.45

表 2 土壤结构相关参数

Table 2 Parameters related to soil structure

δ	$k_s/(m/h)$	m	$D_0/(m^2/(s·°C))$	n
0.02	4.325×10^{-3}	0.291	5×10^{-6}	1.5

4.2 第 1 类热边界相变问题的解析解

为验证 SPH 算法的有效性, 针对半无限空间内一维单侧冻结的相变问题, 固相区域和液相区域的温度分布解析解分别为^[12, 15]

$$\frac{T_s(x, t) - T_0}{T_f - T_0} = \frac{\text{erf}[x / (2\sqrt{\kappa_s t})]}{\text{erf}(\gamma)} \quad (25)$$

$$\frac{T_l(x, t) - T_i}{T_f - T_i} = \frac{\text{erfc}[\mu x / (2\sqrt{\kappa_l t})]}{\text{erfc}[\mu \gamma]} \quad (26)$$

式中: T_s 、 T_l 分别为固、液相区域温度分布; κ_s 、 κ_l 为固、液相热扩散系数 ($\kappa = \lambda / C_v$); $\mu = \sqrt{\kappa_s / \kappa_l}$; 参数 γ 由以下超越方程确定:

$$\frac{e^{-\gamma^2}}{\text{erf}(\gamma)} + \frac{\mu \lambda_l}{\lambda_s} \frac{T_m - T_i}{T_m - T_0} \frac{e^{-\gamma^2 \mu^2}}{\text{erfc}[\mu \gamma]} = \frac{\gamma L_f \sqrt{\pi}}{c_s (T_f - T_0)} \quad (27)$$

式中: L_f 为等效相变潜热 (单位质量介质完成相变释放的总热量); c_s 为固相介质整体的比热。

4.3 计算结果

图 2 给出了温度场单场影响下的解析解, 水-热两场全耦合以及不考虑水流换热时的数值解。从整体来看, 3 种计算方法得到的温度分布趋势基本一致, 由于水分在温度的作用下向冻结锋面移动, 导致水-热耦合下的温度低于解析解, 在 500 h 时, 最大差值达到 $\Delta T = -3.088^\circ\text{C}$ 。且二者差值随时间推移逐渐增大, 故研究长期时间效应下的温度场变化需要充分考虑水-热耦合的作用。在不考虑水流换热时, 虽然水分迁移不直接影响温度场, 但水分迁移引起介质比热、密度等热物理参数的变化, 导致温度略低于解析解。

结合图 3、4, 温度等于相变温度处, 其对应的含水率波动较大, 可明显看出水分向相变锋面迁移的现象。从图 4 看, 相变锋面的随时间的移动似乎是非线性的, 针对这一现象, 图 5 给出了相变锋面位置与时间的关系: 在初始时刻, 相变锋面随时间移动迅速, 单位时间内冻结层厚度增加量较大, 但

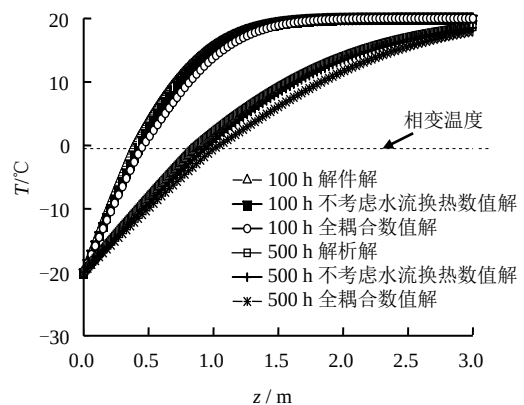


图 2 3 种计算方法结果对比

Fig.2 Comparison of the results in three different methods

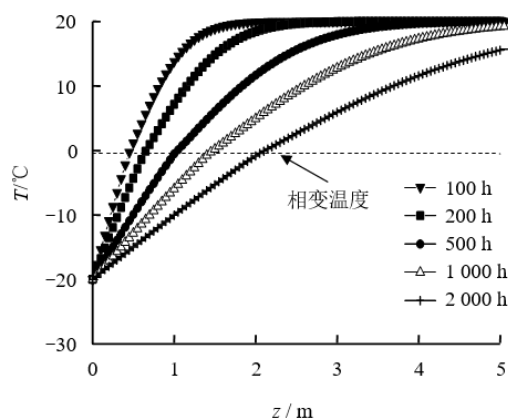


图3 不同时刻的温度分布

Fig.3 Distribution of temperature in different hours

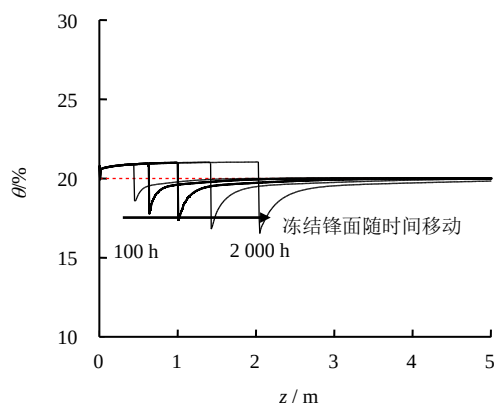


图4 不同时刻的含水率分布

Fig.4 Distribution of moisture content in different hours

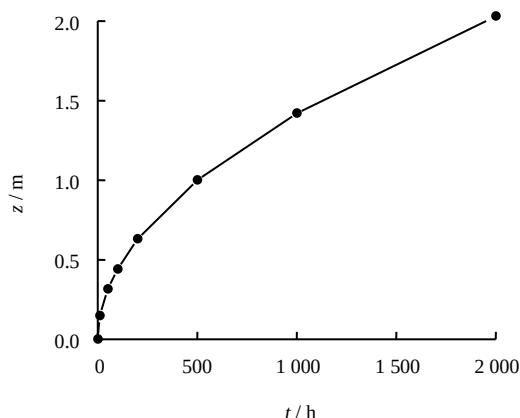


图5 相变锋面位置与时间的关系

Fig.5 Relationship between phase change front and time

随时间推移, t - z 曲线逐渐放缓, 冻结速度减小, 其他学者也有类似结论^[21-22]。

5 二维冻土路基边坡水-热耦合

季节性冻土地区路基的表面温度将随着大气

温度和太阳辐射周期性改变。线路走向及太阳照射角度的不同将使左右路基边坡受到不同的太阳辐射强度, 从而产生坡向的受热差, 当路基阴阳坡效应强烈时, 温度差异所引起的水分不均匀分布更加明显, 由此引起的路基不均匀沉降、路面开裂也愈加严重。因此, 有必要研究相变水-热耦合作用下的阴阳坡效应及其对路基地温、含水率分布的影响。

选取青藏高原某东西走向线路的路基边坡为研究对象, 左、右边坡分别为阴面和阳面, 路基高度为 3 m, 顶部宽度为 9 m, 边坡坡度为 1:1.5, 计算域总深为 8 m, 路基填料为砂黏壤土。采用光滑粒子离散化该路基, 粒子水平间距 $dx = 0.15$ m, 竖向间距 $dz = 0.1$ m。

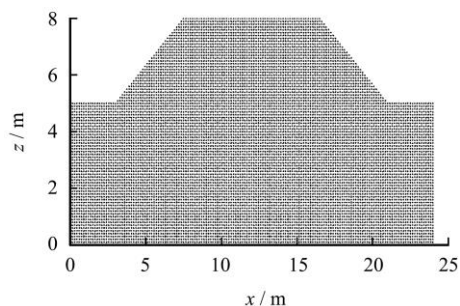


图6 光滑粒子离散化的路基

Fig.6 Discrete subgrade in SPH method

路基表面热边界表达式采用^[23]:

$$T = T_0 + \varepsilon_n \sin(\omega_a t + \varphi_0) + \lambda Q_e \quad (28)$$

式中: T_0 为气温年平均温度; ε_n 为气温振幅; ω_a 为角频率, 对于年波动问题, ω_a 一般取为 $2\pi/8760$ h, φ_0 为初相; Q_e 为每月坡面单位面积有效辐射量 (MJ/m^2); λ 为与路面结构及材料参数有关温度增值系数。

引入坡面系数 ε 表示倾斜面的太阳辐射量与水平面辐射量的比值, 坡面上单位面积的受到辐射量可表示为

$$Q_e = Q_h \varepsilon \eta \quad (29)$$

式中: Q_h 为水平面的太阳总辐射量; η 为路面吸收系数。

倾斜面的总辐射强度可表示为太阳直射辐射强度与散射辐射强度之和, 坡面系数 ε 为^[24]

$$\varepsilon = \varphi [\cos \gamma + \sin \gamma \cot \beta_s \cos(\phi - \alpha)] + \frac{1 + \cos \gamma}{2} (1 - \varphi) \quad (30)$$

式中: γ 为边坡坡角; β_s 为太阳高度角; α 为路基

走向角，为路基纵向与正东方向的夹角； ϕ 为太阳方位角； ρ 为太阳直射辐射与总辐射的比值，针对青藏高原地区， ρ 一般可取 0.6。

假定路基初始温度 $T_0 = 10^\circ\text{C}$ ，计算域上方采用式 (28) 所描述的第 1 类热边界，底部及左右两侧采用绝热边界。初始含水率为梯度分布 $\theta_0 = 0.2 + 0.01(8-z)$ ，地下水位线在计算深度以下，不考虑外界降水对计算域内含水率的影响。土性参数按表 1、2 选取，路基热边界相关参数及太阳辐射相关参数整理如表 3、4 所示。

表 3 路基热边界相关参数

Table 3 Parameters related to thermal boundary				
λ	η	$\varepsilon_n/^\circ\text{C}$	$T_0/^\circ\text{C}$	φ_0
0.008	0.9	20	0	$-\pi/2$

表 4 太阳辐射相关参数

Table 4 Parameters related to solar radiation				
α_l	α_r	β_s	ϕ	$Q_h/(\text{MJ}/\text{m}^2)$
0	180	22	45	500

由上述参数，路基阴阳坡坡面系数分别为 0.283、1.448，对应阴阳坡面温度差 $\Delta T = -4.21^\circ\text{C}$ 。考虑该地日均气温在 $-20 \sim 20^\circ\text{C}$ 浮动，研究某年 1 月 1 日至 12 月 31 日 ($T = 365 \times 24 \text{ h}$) 内路基水-热两场在耦合作用下的演变规律，故将初相取为 $-\pi/2$ 。

图 7(a)、7(c)、7(e)、7(g)和图 8(a)~8(d)为不考虑坡面太阳辐射差（即坡面系数均取 1）时的温度和含水率分布等值线图。图 7(b)、7(d)、7(f)、7(h)和图 8(e)~8(h)为考虑阴阳坡面太阳辐射差时的等值线图。图中 $T/4$ 、 $T/2$ 、 $3T/4$ 、 $1T$ 所表示的时刻分别对应 3 月末、6 月末、9 月末和 12 月末。

图 7 中相邻等值线间的温度梯度为 2°C 。受介质初始温度影响，在作用 $T/4$ 时间后，左右边坡浅层（坡面下方 1 m 内）温差为 0.970°C ，故在等值线图中没有明显的不对称。但作用时间越长，温差逐渐增大，边坡温度分布不均匀的现象愈发明显，作用 $1T$ 后，温差达 3.704°C 。

图 8(a)、8(c)、8(e)、8(g)中相邻等值线含水率

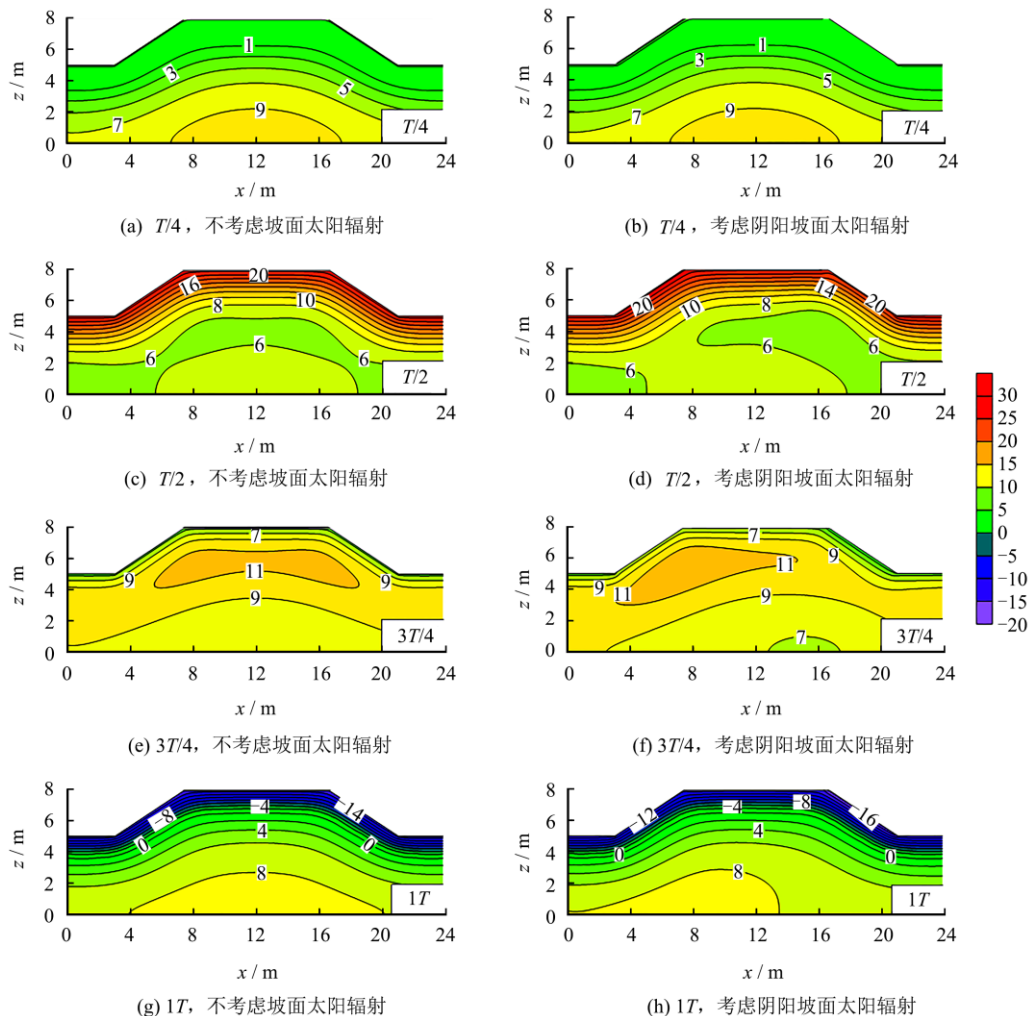


图 7 路基非稳态温度分布场等值线图（单位： $^\circ\text{C}$ ）

Fig.7 Contour map of unsteady temperature filed in subgrade(unit: $^\circ\text{C}$)

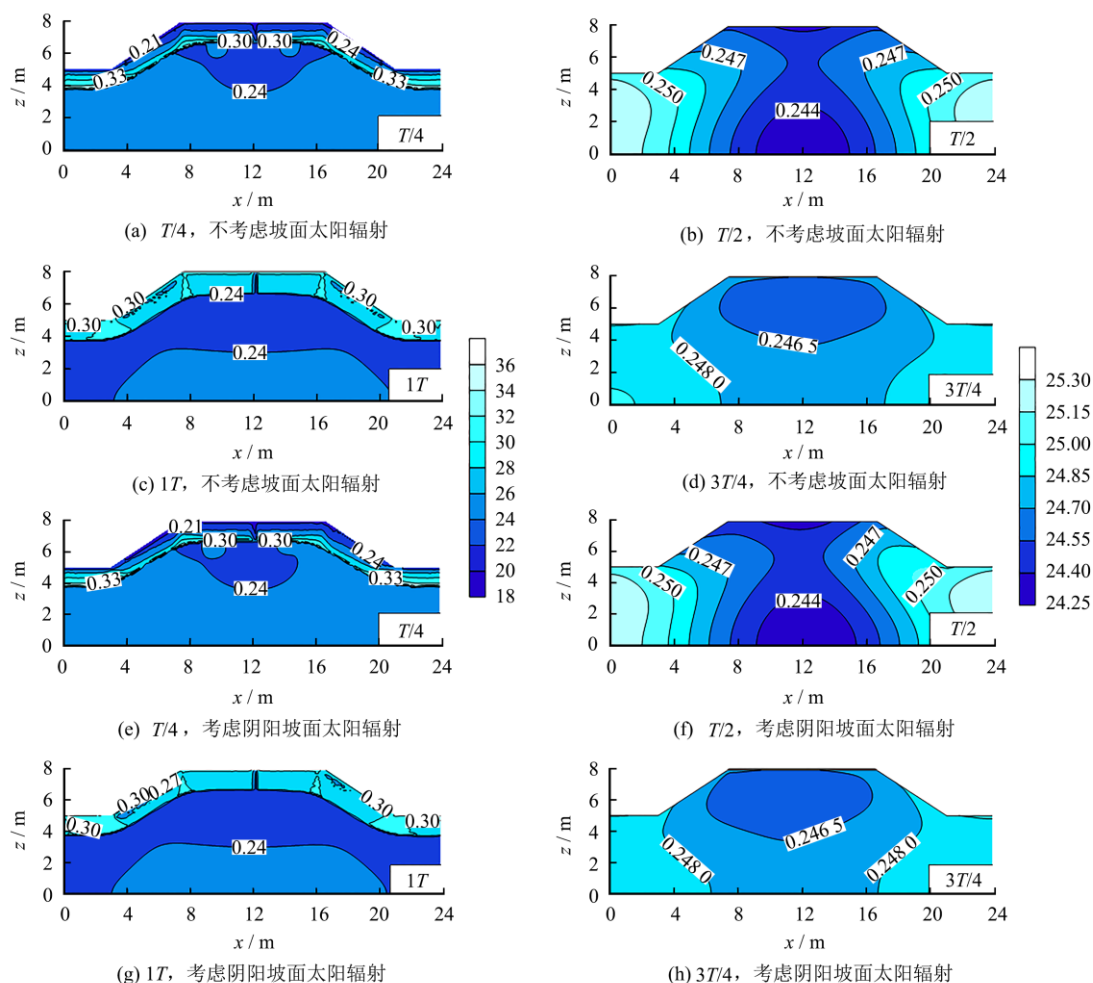


图8 路基体积含水率分布场等值线图(单位: %)

Fig.8 Contour map of volumetric water content field in subgrade(unit: %)

梯度为 0.03, 图 8(b)、8(d)、8(f)、8(h)中为 0.001 5。由于在 1-3 月、10-12 月气温较低, 路基内部经历相变, 故在图 8(a)、8(c)、8(e)、8(g)中含水率起伏较大, 在相变锋面停留处含水率梯度陡增。对比相变前后路基浅层含水率, 1T 时刻比 3T/4 时刻含水率提高近 20%, 考虑阴阳边坡效应后, 在温差的驱使下, 左右两侧边坡含水率有一定的差异。

6 结 论

(1) 采用自行编制的 Fortran 程序, 对建立的考虑相变的非饱和多孔介质水热耦合控制方程采用光滑粒子法模拟, 从求解热流方程中的含冰量出发, 实现解耦。而过去处理这类问题, 常采用经验性的含水率-温度联系方程, 相变中水分迁移过程的模拟结果往往与该联系方程的形式有关。因此, 从含冰量出发求解该耦合方程不失为一种直接可靠的方法。

(2) 本文所采用的热流平衡方程中加入了水

分流动传热, 在水土势中加入了温度势, 较为完整地考虑了水力场对温度场、温度场对水力场的耦合作用。此外, 该水-热耦合平衡方程在非相变状态下可退化为常温下的水-热耦合方程, 故可用于模拟冻融循环问题。

(3) 计算了第 1 类热边界冻结相变水热耦合下温度场的数值解, 并与解析解进行对比, 反应出水分迁移对介质的温度场存在较大影响, 且随时间推移该影响不断积累, 故在考虑长期时间效应时, 水流传热的影响不可忽略。

(4) 采用基于 SPH 算法的水-热耦合程序, 得到了二维路基在循环热边界下的水-热耦合结果。从本算例结果来看, 该路基阴阳坡效应对含水率的影响在短期内影响有限, 但当路基阴阳坡效应强烈、路基介质结构性对温度敏感、考虑长期时间效应时, 温差对含水率的影响将更加显著。

(5) 该算法可应用于北部地区季节性冻土区域的地温、含水率预测, 具有一定工程实用价值。

算例所得结果能反映出土冻结相变的实际物理过程, 表明光滑粒子算法可以用于尝试解决冻土领域的其他相关问题。

参 考 文 献

- [1] 白冰, 刘大鹏. 非饱和介质中热能传输及水分迁移的数值积分解[J]. 岩土力学, 2006, 27(12): 2085—2089.
BAI Bing, LIU Da-peng. Numerical integral solutions of heat transfer and moisture transport in unsaturated porous media[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(12): 2085—2089.
- [2] 李洪升, 刘增利, 梁承姬. 冻土水热耦合作用的数学模型及数值模拟[J]. 力学学报, 2001, 33(5): 621—629.
LI Hong-sheng, LIU Zeng-li, LIANG Cheng-ji. Mathematical model for coupled moisture, heat and stress field and numerical simulation of frozen soil[J]. **Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, 2001, 33(5): 621—629.
- [3] BROOKSHAW L. The stability of binary systems and rotating stars[D]. Melbourne: Monash University, 1986.
- [4] CLEARY P W, MONAGHAN J J. Conduction modeling using smoothed particle hydrodynamics[J]. **Journal of Computational Physics**, 1999, 148(1): 227—264.
- [5] LIU M B, LIU G R. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): An overview and recent developments[J]. **Archives of Computational Methods in Engineering**, 2010, 17(1): 25—76.
- [6] 陈佩佩, 白冰. 非饱和土中温度引起水分迁移的光滑粒子法数值模拟[J]. 工程力学, 2016, 33(4): 150—156.
CHEN Pei-pe, BAI bing. SPH numerical simulation of moisture migration caused by temperature in unsaturated soils[J]. **Engineering Mechanics**, 2016, 33(4): 150—156.
- [7] LIU G R, LIU M B. Smoothed particle hydrodynamics—A meshfree method[J]. **Computational Mechanics**, 2004, 33(6): 491.
- [8] HARLAN R L. Analysis of coupled heat-fluid transport in partially frozen soil[J]. **Water Resource Research**, 1973, 9(5): 1314—1322.
- [9] TAYLOR G S, LUTHIN J N. A Model for coupled heat and moisture transfer during soil freezing[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1978, 15(4): 548—555.
- [10] 朱志武, 宁建国, 马巍. 土体冻融过程中水、热、力三场耦合本构问题及数值分析[J]. 工程力学, 2007, 24(5): 138—144.
- [11] 白青波, 李旭, 田亚护, 等. 冻土水热耦合方程及数值模拟研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(增刊 2): 131—136.
BAI Qing-bo, LI Xu, TIAN Ya-hu, et al. Equations and numerical simulation for coupled water and heat transfer in frozen soil[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2015, 37(Supp.2): 131—136.
- [12] BAI BING, RAO DENG YU, XU TAO, et al. SPH-FDM boundary for the analysis of thermal process in homogeneous media with a discontinuous interface[J]. **International Journal of Heat & Mass Transfer**, 2018, 117: 517—526.
- [13] 杨更社, 周春华, 田应国. 寒区软岩隧道的水热耦合数值模拟与分析[J]. 岩土力学, 2006, 27(8): 1258—1262.
YANG Geng-she, ZHOU Chun-hua, TIAN Ying-guo. Numerical simulation and analysis of moisture-heat coupling for soft rock tunnel in cold regions[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(8): 1258—1262.
- [14] 张明礼, 温智, 董建华, 等. 多年冻土活动层浅层包气带水-汽-热耦合运移规律[J]. 岩土力学, 2018, 39(2): 561—570.
ZHANG Ming-li, WEN Zhi, DONG Jian-hua, et al. Coupled water-vapor-heat transport in shallow unsaturated zone of active layer in permafrost regions[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(2): 561—570.
- [15] CARSLAW H S, JAEGER J C. Conduction of heat in solids[J]. Oxford: Clarendon Press, 1959.
- [16] GENUCHTEN M T V. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. **Soil Science Society of America Journal**, 1980, 44(5): 892—898.
- [17] CARSEL R F, PARRISH R S. Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics[J]. **Water Resources Research**, 1988, 24(5): 755—769.
- [18] 高红贝, 邵明安. 温度对土壤水分运动基本参数的影响[J]. 水科学进展, 2011, 22(4): 484—494.

- GAO Hong-bei, SHAO Ming-an. Effect of temperature on soil moisture parameters[J]. **Advances in Water Science**, 2011, 22(4): 484—494.
- [19] NASSAR I N, HORTON R. Heat, water, and solution transfer in unsaturated porous media: I -- Theory development and transport coefficient evaluation[J]. **Transport in Porous Media**, 1997, 27(1): 17—38.
- [20] 陈卫忠, 龚哲, 于洪丹, 等. 黏土岩温度-渗流-应力耦合特性试验与本构模型研究进展[J]. 岩土力学, 2015, 36(5): 1217—1238.
- CHEN Wei-zhong, GONG Zhe, YU Hong-dan, et al. Review of thermo-hydro-mechanical coupled tests and constitutive models of clays[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(5): 1217—1238.
- [21] 唐益群, 洪军, 杨坪, 等. 人工冻结作用下淤泥质黏土冻胀特性试验研究[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(5): 772—776.
- TANG Yi-qun, HONG Jun, YANG Ping, et al. Frost-heaving behaviors of mucky clay by artificial horizontal freezing method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2009, 31(5): 772—776.
- [22] 何敏, 李宁, 刘乃飞. 饱和冻土水热力耦合模型解析及验证[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(10): 1858—1865.
- HE Min, LI Ning, LIU Nai-fei. Analysis and validation of coupled heat-moisture-deformation model for saturated frozen soils[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2012, 34(10): 1858—1865.
- [23] 白青波, 李旭, 田亚护. 路基温度场长期模拟中的地表热边界条件研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(6): 1142—1149.
- BAI Qing-bo, LI Xu, TIAN Ya-hu, et al. Upper boundary conditions in long-term thermal simulation of subgrade[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2015, 37(6): 1142—1149.
- [24] 夏利江. 多年冻土区典型工程太阳辐射规律及热边界模型研究[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2015.
- XIA Li-jiang. Research on solar radiation law and thermal boundary model of typical engineering in permafrost region[D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2015.
- [17] 李飞, 葛爱兵. 路堤下地基土侧向位移预测分析[J]. 路基工程, 2008, (1): 11—12.
- LI Fei, GE Ai-bing. Analysis of lateral deformation in soft soil deposits under fill construction[J]. **Subgrade Engineering**, 2008, (1): 11—12.
- [18] 陈继彬, 赵其华, 彭社琴, 等. 塑料排水板处理软基侧向变形规律及预测模型[J]. 工程地质学报, 2014, 22(2): 218—225.
- CHEN Ji-bin, ZHAO Qi-hua, PENG She-qin, et al. Lateral deformation law of soft soil subgrade treated by plastic drainage Plate and forecasting model[J]. **Journal of Engineering Geology**, 2014, 22(2): 218—225.
- [19] 肖红兵, 蒋关鲁. 路堤作用下地基的侧向位移计算分析[J]. 公路交通科技, 2014, 31(2): 14—20.
- XIAO Hong-bing, JIANG Guan-lu. Analysis of lateral displacement of subgrade under embankment[J]. **Journal of Highway and Transportation Research and Development**, 2014, 31(2): 14—20.
- [20] 蒋关鲁, 兰维维, 肖红兵, 等. 路基荷载下地基侧向变形的计算方法[J]. 重庆大学学报, 2014, 37(2): 89—97.
- JIANG Guan-lu, LAN Wei-wei, XIAO Hong-bing, et al. A study on lateral deformation calculation of foundation under embankment[J]. **Journal of Chongqing University**, 2014, 37(2): 89—97.
- [21] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000.
- SHEN Zhu-jiang. Theory of soil mechanics[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2000.
- [22] 杨进良. 土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.
- YANG Jin-liang. Soil mechanics[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2009.

上接第 4526 页